Tikimybių teorija ir matematinė statistika.

Prioritetiniai klausimai

Konspektas

1. **Aksiominis tikimybes apibrėžimas.**

***Apibrėžimas***: Tikimybe vadiname neneigiamą, normuotą ir adityvią skaitinę funkciją P:

\* P(A) >= 0.

\* P(Ω) = 1.

\* P(𝐴 ∪ 𝐵) = P(A) + P(B), kai A ∩ B <= Ø.

1. **Paprasčiausios tikimybės savybės: 1) 𝑃(𝐴) = 1 − 𝑃(𝐴), ∀ 𝐴 ∈ 𝒜 ; 2) Jei 𝐵 ⊂ 𝐴, tai 𝑃(𝐴\𝐵) = 𝑃(𝐴) − 𝑃(𝐵), ∀ 𝐴, 𝐵 ∈ 𝒜 ; 3) (Įvykių sąjungos tikimybės formulė) P(𝐴 ∪ 𝐵) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B), ∀ 𝐴, 𝐵 ∈ 𝒜 ; 4) P(A I B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B).**

**1)** ?

**2)** ?

**3)** Dviejų įvykių sąjungos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sumos bei įvykių sankirtos tikimybės skirtumui.

**4)** Dviejų įvykių sankirtos tikimybė lygi vieno įvykio tikimybei padaugintai iš kito įvykio sąlyginės tikimybės.

1. **Sąlyginė tikimybė (apibrėžimas) ir 𝑃(𝐴|𝐵) = 𝑃(𝐴∩𝐵)/ 𝑃(𝐵) . Įvykiu sankirtos tikimybės teoremų formuluotės, kai n =2 ir bendru atveju. ( 𝑃(𝐴 ∩ 𝐵) = 𝑃(𝐴) ∙ 𝑃(𝐵|𝐴) , 𝑃(𝐴1 ∩ 𝐴2 ∩ ⋯ ∩ 𝐴𝑛 ) = 𝑃(𝐴1 ) ∙ 𝑃(𝐴2|𝐴1 ) ∙ 𝑃(𝐴3|𝐴1 ∩ 𝐴2 ) ∙ ⋯ ∙ 𝑃(𝐴𝑛|𝐴1 ∩ 𝐴2 ∩ ⋯ ∩ 𝐴𝑛−1 ) ).**

Įvykio A sąlyginė tikimybė, kai įvykęs įvykis B, vadiname įvykių A ir B sankirtos tikimybės ir įvykio B tikimybės santykį.

1. **Pilnoji įvykių grupė (apibrėžimas). Pilnosios tikimybės ir Bejeso formulių formuluotės.**

***Pilnoji įvykių grupė (apibrėžimas) :*** Įvykiai, H1, H2, ...., Hn sudaro pilnąją įvykių grupę, jei jie kas du nesutaikomi, o jų sąjunga yra būtinas įvykis : H1 U H2 U....U Hn = Ω ir Hk ∩ Hm = ∅ su visais k ≠ m.

***Pilnosios tikimybės formulių formuluotė:*** 𝑃(𝐴) = ∑ 𝑃(𝐻𝑘 ) ∙ 𝑃(𝐴|𝐻𝑘 ) 𝑛 𝑘=1

***Bejeso formulių formuluotės:***

𝑃(𝐻𝑗 |𝐴) = 𝑃(𝐻𝑗∩𝐴) 𝑃(𝐴) = 𝑃(𝐻𝑗 )∙𝑃(𝐴|𝐻𝑗 ) ∑ 𝑃(𝐻𝑘 )∙𝑃(𝐴|𝐻𝑘 ) 𝑛 𝑘=1 )

1. **Nepriklausomi, poromis nepriklausomi, visumoje nepriklausomi įvykiai (apibrėžimai). Bernulio eksperimentai (apibrėžimas).Bernulio formulė (formuluotė).**

Įvykius A ir B vadiname ***nepriklausomaisiais***, kai jų sankirtos tikimybė lygi tikimybių sandaugai.

***Bernulio eksperimentai (apibrėžimas):***

Nepriklausomieji bandymai, kurių kiekvieno metu gali įvykti tik įvykis A arba jam priešingas įvykis A‘, su nekintančiomis visuose bandymuose tikimybėmis, vadinami Bernulio bandymais.

***Bernulio formulė (formuluotė):*** P(A)=p ir P(A) =1 − p .

1. **Skirstinio (pasiskirstymo) funkcija , jos apibrėžimas ir savybės. Tolydaus atsitiktinio dydžio apibrėžimas ir jo savybės. Absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio apibrėžimas, tankio funkcija ir jos savybės.**

Atsitiktinio dydžio X **skirstinio funkcija** Fx vadiname įvykio { ω:X(ω) ≤x) tikimybę:

Fx(x)=P(ω:X(ω)≤x), x∈R.

Atsitiktinis dydis vadinamas ***tolydžiuoju (absoliučiai tolydžiuoju)***, jeigu egzistuoja tokia funkcija p(x), su kuria : F(x) = , kai x ∈ R.

?

1. **Atsitiktinių dydžių skaitinės charakteristikos: vidurkis, dispersija, p – lygio kvantilis, jų apibrėžimai ir savybės.**

***VIDURKIS*** : Atsitiktinio dydžio X vidurkiu vadiname skaičių:

MX = ,

Kai X – diskretusis atsitiktinis dydis:

MX=

Atsitiktinio dydžio X vidurkis MX yra skaičius, apie kurį yra susitelkusios atsitiktinio dydžio įgyjamos reikšmės.

***p-lygio kvantilis:*** Tarkime, kad 0<p<1. Atsitiktinio dydžio X p-tuoju kvantiliu vadine skaičių xp, su kuriuo : P(X < xp) <= p <= P(X < xp).

Jei X yra tolydusis atsitiktinis dydis su tanku p(x), tai kvantilis xp yra lygties

F(xp) = sprendinys.

Kvantilis visada egzistuoja, tačiau ne visada vienareikšmiškai nusakomas.

***DISPERSIJA:*** Atsitiktinio dydžio X dispersija DX vadinama šio dydžio nuokrypio nuo vidurkio kvadrato vidurkį:

DX = M(X-MX)2

Iš apibrėžimo išplaukia tokios dispersijos skaičiavimo formulės:

DX = , kai X – diskretusis dydis, ir

DX = , kai X – tolydusis atsitiktinis dydis.

1. **Atsitiktinio vektoriaus (X, Y ) skirstinio (pasiskirstymo) funkcijos 𝐹(𝑋,𝑌)(𝑥, 𝑦) apibrėžimas ir savybės. Diskretieji ir tolydieji atsitiktiniai vektoriai (apibrėžimai). Tankio funkcija p(x, y) ir jos savybės. Atsitiktinių dydžių nepriklausomumas apibrėžimas ir išvados.**

***Dvimačiu atsitiktiniu dydžiu(Vektoriumi)*** vadiname vektorių(X, Y) kurio koordinatės yra vienmačiai atsitiktiniai dydžiai toje pačioje tikimybinėje erdvėje {Ω, F, P}.

Funkcija F(x, y) = P(X <= x, Y <= y) = P({ω : X(ω) <= x} ∩ { ω:Y(ω) <= y}) vadinama ***atsitiktinio vektoriaus (X, Y) pasiskirstymo funkcija***. Geometriniu požiūriu ji rodo tikimybę tašku (X,Y) patekti į užbrūkšniuotą sritį.

***Pagrindinės pasiskirstymo funkcijos sąvybės:***

1. 0 <= F(x,y) <= 1, su visais (x,y) ∈ R2,
2. F(x,y) – tolydi iš dešinės ⩝(x,y) ∈ R2,
3. F(x,y) – nemažėjanti kiekvieno argumento ažvilgiu,
4. Šiai funkcijai galioja lygybės :

F(-∞,y) = F(x, -∞)=F(-∞, -∞) = 0,

F(+∞,+∞) = 1,

1. F1(x) = P(X <= x) = F(x, +∞),

F2(y)= P(Y <= y) = F(+∞,y).

***Diskrečiojo atsitiktinio vektoriaus apibrėžimas :*** Atsitiktinis vektoriu (X, Y) kurio abi komponentės X ir Y yra diskrečios vadinamos diskrečiuoju.

***Tolydieji atsitiktinio vektoriaus apibrėžimas*** : Dvimatį atsitiktiniai vektorių (X,Y) vadiname absoliučiai tolydžiu, jeigu egzistuoja neneigiama funkcija p(x,y) apibrėžta visiems (x,y) ∈ R2 su kuria pasiskirstymo funkcija F(x,y) = , kai (x,y) ∈ R2.

***TANKIO FUNKCIJA***: Funkciją p(x,y) vadiname vektoriaus (X,Y) tikimybių tankio funkcija (tankiu).

***TANKIO FUNKCIJOS SAVYBĖS:***

1. P(x,y) >= 0, ⩝(x,y) ∈ R2,
2. P((X,Y) ∈ D) =

***IŠVADOS:***

Sąlyginis atsitiktinio dydžio X tankis, kai Y=y apibrėžiamas taip:

Analogiškai atsitiktinio dydžio Y sąlyginis tankis, kai X=x :

Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių nepriklausomumą apibūdina lygybė:

P(x,y) = p1(x) \* p2(y) su visais (x,y) ∈ R2 .

1. **Atsitiktinių vektorių skaitinės charakteristikos. Kovariacija ir koreliacija apibrėžimai ir savybės (be įrodymo). Sąlyginiai vidurkiai (apibrėžimai).**

***Atsitiktinio vektoriaus(X,y) vidurkiu*** vadinamas vektorius(MX,MY).

***Dydžių X ir Y kovariacija*** vadinamas skaičius cov(X,Y) = M((X-MX)(Y-MX)).

Dydžius X ir Y vadiname nekoleriuotais, jei cov(X,Y)=0.

***Dvimačio vektoriaus X,Y) kovariacine*** matrica vadina matrica K =

***Kovariacijos savybės:***

1. cov(X,X) = DX;
2. cov(X,Y) = cov(Y,X)
3. cov(X,aY+bZ)=acov(X,Y)+bcov(X,Z).
4. cov(X,Y)=M(X\*Y)-MX\*MY;
5. |cov(X,Y)| <=
6. Jei X ir Y yra nepriklauso, tai jie ir nekoleriuoti.

***Koreliacijos koeficiento savybės:***

1. p(ax+b, cY + d) = p(X,Y), kai a>0 ir x>0
2. Jei x ir Y yra nepriklausomi, tai p(X,Y) = 0;
3. |p(X,Y)| <= 1;
4. |p(X,Y)| = 1 tada, ir tik tada, kai atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra tiesiškai priklausomi,

***Sąlyginiai vidurkiai:***

Funkcija gy(x)=M(Y|x) = vadinama atsitiktinio dydžio Y regresija X atžvilgiu, o funkcija ϕx(y)=M(X|y)= vadinama atsitiktinio dydžio X regresija Y atžvilgiu.

1. ***Empirinė skirstinio funkcija, histograma ir poligonas. Empirinis p lygio kvantilis, empirinis vidurkis ir empirinė dispersija.***

***Empirinė skirstinio funkcija:***

***Tankio funkcijos empirinės charakteristikos (histograma ir poligonas):***

Empirinė tankio funkciją galime vaizduoti:

1. ***histograma*** hn(x) =

Naudojantis histograma tankio funkcija aproksimuojama paprasčiausiomis (laiptinėmis) funkcijomis (stačiakampiais)

1. Aproksimuodami tankio funkciją atkarpomis tiesine funkcija gauname ***poligoną*** pn(x) – tai laužtė jungianti gretimus taškus .

***Empirinis p lygio kvantilis:***

***Empirinis vidurkis:***

***Empirinė dispersija:***

11.**Taškiniai parametrų įverčiai ir jų kokybės kriterijai (suderinamumas, nepaslinktumas, efektyvumas).**

Statistiką 𝜃̂‘ 𝑛 = 𝜃̂‘ 𝑛 (𝑋1, 𝑋2, ⋯ , 𝑋𝑛 ), nepriklausančą nuo parametro 𝜃̂, vadiname ***parametro 𝜃̂ taškiniu įverčiu.***

***SUDERINTASIS ĮVERTIS***:

Įvertis 𝜃̂‘n vadinamas suderintuoju, jeigu:

∀ 𝜀 > 0 𝑃(|𝜃̂‘ 𝑛 − 𝜃| < 𝜀) 1, t.y. 𝜃̂‘ 𝑛 𝑃 → 𝜃̂

***NEPASLINKTASIS ĮVERTIS:***

Įvertis 𝜃̂‘n vadinamas nepaslinktuoju, jeigu M 𝜃̂‘n = 𝜃̂.

Skirtumas M 𝜃̂‘n - 𝜃̂ vadinamas įverčio 𝜃̂‘n poslinkiu arba sistemine paklaida.

***EFEKTYVUSIS ĮVERTIS:***

Tarkime, kad turime du nepaslinktus parametro 𝜃̂ įverčius 𝜃̂‘n ir 𝜃̂\*n

12**.Taškinių įverčių radimo metodai (momentų ir didžiausio tikėtinumo) jų esmė ir taikymas.**

***MOMENTŲ METODAS****:* Metodo esmė – empiriniai momentai arba jų funkcijos prilyginamos atitinkamiems teoriniams momentams ir gautoji lygčių sistema 𝛼𝑖 (𝜃1, 𝜃2, ⋯ , 𝜃𝑟 ) = 𝑎𝑖 , 𝑖 = (1, r)‘ sprendžiama nežinomo parametrų 𝜃i atžvilgiu. Šios sistemos sprendinys 𝜃𝑖 = 𝜃𝑖 (𝑋1, 𝑋2, ⋯ , 𝑋𝑛 ),𝑖 = (1, 𝑟)‘ ir imamas kaip parametro įvertis

***DIDŽIAUSIO TIKĖTINUMO METODAS****:* Didžiausio tikėtinumo metodo esmė – rasti parametro 𝜃 įvertį 𝜃‘ = (𝜃‘1, 𝜃‘2,..., 𝜃‘r) su kuriuo didžiausio tikėtinumo funkcijos L(x‘,𝜃), o tuo pačiu ir funkcijos lnL(x‘, 𝜃) reikšmė būtų maksimali.

13. **Pasikliautinojo intervalo sąvoka**

***Pasikliautinais intervalas* -** intervalas, kuriame, tikėtina, yra matuojamo dydžio parametras

14. **Statistinė hipotezė, statistinis kriterijus, kritinė sritis, pirmos ir antros rūšies klaidos, reikšmingumo lygmuo, kriterijaus galia (sąvokos ir apibrėžimai).**

***Statistine hipoteze*** vadinama bet kuri prielaida apie nežinomą generalinės aibės tikimybių skirstinį ℒ(𝜉).

Taisyklė kuria remiantis tikrinamoji hipotezė 𝐻0 (kartu su pasirinkta alternatyvia hipoteze 𝐻1) priimama arba atmetama vadinama ***hipotezės statistiniu kriterijumi.***

Hipotezės H0 atmetimo aibė R1 vadinama šios hipotezės ***kritine sritimi.***

***Pirmosios rūšies klaida*** – atmesti pradinę hipotezę H0 , kai ji yra teisinga. Šios klaidos tikimybė α lygi tikimybei imčiai 𝑥⃗ = (𝑥1; 𝑥2; ⋯ ; 𝑥𝑛 ) patekti į kritinę sritį R1 , kai H0 yra teisinga.

***Antrosios rūšies klaida*** – priimti pradinę hipotezę H0 , kai ji yra klaidinga. Šios klaidos tikimybė β lygi tikimybei imčiai 𝑥⃗ = (𝑥1; 𝑥2; ⋯ ; 𝑥𝑛 ) nepatekti į kritinę sritį R1 , kai H0 yra klaidinga t. y. kai teisinga alternatyvi hipotezė. Taigi 𝛽 = 𝑃(𝑥⃗ ∉ 𝑅1| 𝐻0) = 1 − 𝑃(𝑥⃗ ∈ 𝑅1| 𝐻0) .

Tikimybė atmesti pradinę hipotezę H0 , kai ji yra teisinga (pirmos rūšies klaidos tikimybė), vadinama hipotezės H0 reikšmingumo lygmeniu, t. y. 𝛼 = 𝑃(𝑥⃗ ∈ 𝑅1| 𝐻0 ) – ***hipotezės H0 reikšmingumo lygmuo.***

Tikimybė atmesti klaidingą pradinę hipotezę H0 , kai teisinga alternatyvi hipotezė (antros rūšies klaidos nebuvimo tikimybė) 𝑃(𝑥⃗ ∈ 𝑅1| 𝐻0) = 1 − ***𝛽 vadinama kriterijaus galia.***